CORRIGÉ DU BREVET

MATHÉMATIQUES • MÉTROPOLE / RÉUNION • 2019

Exercice I

1

D'après le cours, la liste des nombres premiers connus sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 …

Pour résoudre cette question, il faut donc retrouver 69, 1150 et 4140 en multipliant uniquement des nombres premiers.

69 = 3 × 23 *(réponse finale)*

1150 = 5 × 230
= 5 × 23 × 10
= 5 × 23 × 5 × 2
= 2 × 5 × 5 × 23
= 2 × 5^2 × 23 *(réponse finale)*

4140 = 5 × 828
= 5 × 3 × 276
= 5 × 3 × 3 × 92
= 5 × 3 × 3 × 4 × 23
= 5 × 3 × 3 × 2 × 2 × 23
= 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 23
= 2^2 × 3^2 ×5 × 23 *(réponse finale)*

2

Comme le capitaine a partagé équitablement le trésor, cela signifie qu'il a divisé le nombre de diamants, perle et pièces d'or par le même nombre.

Le seul multiple commun entre 69, 1150 et 4140 est 23. Cela signifie qu'il y a 23 marins.

Exercice II

1

D'après l'énoncé :

- Le triangle ADM est rectangle en A ;
- AD = 2 m ;
- $\widehat{ADM} = 60°$.

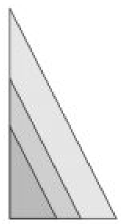


Figure 1

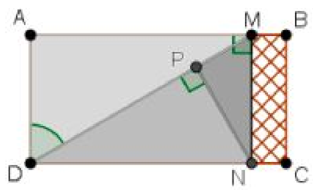


Figure 2

D'après le cours, la tangente d'un angle α est donnée par la formule :

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Comme le triangle ADM est rectangle en A :

$$\tan \widehat{ADM} = \frac{AM}{AD} \text{ donc } AM = AD \times \tan \widehat{ADM}$$

donc AM = 2 × $\tan$ 60° ≈ 3.46 m.

2

- AB = 4 m (voir énoncé)
- AM = 3.46 m (voir question 1)

Comme les points A, M et B sont alignés :
$MB = AB - AM = 4 - 3.46 = 0.54$ m

L'aire A d'un rectangle de longueur L et de largeur l est donnée par la formule :

$A = L \times l$

L'aire A_1 du rectangle ABCD est donc égale à :

$A_1 = AB \times BC = 4 \times 2 = 8$ m^2.

(Rappel : BC = 2 m, voir énoncé)

L'aire A_2 du rectangle MBCN est donc égale à :

$A_2 = MB \times BC = 0.54 \times 2 = 1.08$ m^2.

La proportion P de la plaque qui n'est pas utilisée est donnée par la formule :

$$P = \frac{A_2}{A_1} \times 100 = \frac{1.08}{8} \times 100$$
$$= 0.135 \times 100 = 13.5\ \%$$

3

➢ Le triangle AMD possede 3 angles :

$$\widehat{ADM}, \widehat{DMA} \text{ et } \widehat{MAD}$$

- $\widehat{MAD} = 90°$ car AMD est un triangle rectangle en A.

- $\widehat{ADM} = 60°$ (voir énoncé)

- $\widehat{DMA} = 30°$ car la somme des de tous les angles d'un triangle fait 180° donc :

$$\widehat{ADM} + \widehat{DMA} + \widehat{MAD} = 180°$$

donc :

$$\widehat{DMA} = 180° - \widehat{ADM} - \widehat{MAD}$$
$$= 180° - 60° - 90°$$
$$= 30°$$

Ainsi le triangle AMD possède des angles de 90°, 60° et 30°.

D'après le cours, des triangles sont semblables si leurs angles ont les mêmes valeurs.

Ainsi, les triangles AMD, PNM et PDN seront sembles si PNM et PDN possèdent (comme AMD) des angles de 90°, 60° et 30°.

➢ Le triangle PNM possede 3 angles :

$$\widehat{PNM}, \widehat{NMP} \text{ et } \widehat{MPN}$$

- $\widehat{MPN} = 90°$ (voir la Figure 2 de l'énoncé).

- $\widehat{NMP} = 60°$ car :

$$\widehat{NMA} = 90° \text{ (voir Figure 2 de l'énoncé)}$$
$$\widehat{DMA} = 30° \text{ (voir démonstration ci-dessus)}$$
$$\widehat{NMA} = \widehat{NMP} + \widehat{DMA}$$
$$\text{donc } \widehat{NMP} = \widehat{NMA} - \widehat{DMA}$$
$$= 90° - 30° = 60°$$

- $\widehat{PNM} = 30°$ car la somme des de tous les angles d'un triangle fait 180°.

Ainsi, le triangle *PNM* possède des angles de 90°, 60° et 30°.

➢ Le triangle *PDN* possede 3 angles :

$\widehat{PNM}$, $\widehat{NMP}$ *et* $\widehat{MPN}$

- $\widehat{NPD} = 90°$ (voir la Figure 2 l'énoncé).

- $\widehat{NMP} = 60°$ car :

$\widehat{ADN} = 90°$ (car ADMN est un rectangle)

$\widehat{ADM} = 60°$ (voir énoncé)

Comme les points D, P et M sont alignés :

$- \widehat{ADM} = \widehat{ADM} = 60°$

$-$ de même, $\widehat{\text{ADM}} = \widehat{\text{ADM}}$

Ainsi : $\widehat{ADN} = \widehat{ADM} + \widehat{MDN} = \widehat{ADP} + \widehat{PDN}$

donc $\widehat{PDN} = \widehat{ADN} - \widehat{ADP}$

$= 90° - 60° = 30°$

- $\widehat{DNP} = 60°$ car la somme des de tous les angles d'un triangle est de 180°.

Ainsi, le triangle *PDN* possède des angles de 90°, 60° et 30°.

➢ Conclusion : Les triangles *AMD*, *PNM* et *PDN* sont semblables car ils possèdent tous les trois des angles de 90°, 60° et 30°.

4

Les triangles *PND* et *AMD* sont semblables (voir Question 3). Leur rapport d'agrandissement *R* est donc égale au rapport de leur deux diagonales *DN* et *DM* :

$$R = \frac{DM}{DN}$$

DN = *AM* = 3.46 m (car *AMND* est un rectangle et AM = 3,46 m - voir Question 1)

D'après le théorème de Pythagore :

$$DM^2 = AD^2 + AM^2$$
$$= 2^2 + 3.46^2$$
$$= 15.9716$$

Donc $DM = \sqrt{DM^2} = \sqrt{15.9716} \approx 4$ m

Donc :

$$R = \frac{DM}{DN} = \frac{4}{3.46} \approx 1{,}16$$

Ce résultat est bien inférieur à 1.5

Exercice III

1

a. L'énoncé rappelle que le volume V d'un cylindre de d'aire de base B et de hauteur h est donné par la formule :

$$V = B \times h$$

En fait, la base d'un cylindre étant un cercle, cette formule peut se réécrire :

$$V = \pi r^2 h$$

où πr^2 correspond à l'aire d'un cercle de rayon r.

Le cylindre C_2 a une hauteur h de 4.2 cm et un diamètre de D de 1.5 cm. Son rayon r est donc de 0.75 cm (= D/2). Son volume V_{C2} du cylindre C_2 est égale à :

$$\begin{aligned} V_{C2} &= \pi r^2 h \\ &\approx 3{,}14 \times 0.75^2 \times 4.2 \\ &\approx 7{,}42 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Comme au départ, le sable remplit le cylindre C_2 aux deux tiers, le volume V_S du sable est environ de :

$$\begin{aligned} V_S &= \tfrac{2}{3} \times V_{C2} \\ &\approx \tfrac{2}{3} \times 7.4 \\ &\approx 4.95 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

b. Le débit d'écoulement du sable est constant et égal à 1.98 cm³/min. Cela signifie qu'en une minute 1.98 cm³ de sable s'écoule. Le tableau de proportionnalité suivant permet de montrer que 4.95 cm³ mettront 2.5 minutes à s'écouler.

Temps d'écoulement (en minute)	1	2.5
Volume de sable (en cm³)	1.98	4.95

La valeur 2.5 est trouvée grâce au calcul :

$$2.5 = \frac{1 \times 4.95}{1.98}$$

En fait, le produit en croix de ce tableau de proportionnalité donne l'égalité : 1 × 4.95 = 1.98 × 2.5

2

a. Pour savoir le nombre total de tests, il faut faire la somme de tous les tests, soit :

1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 + 6+ 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 40

40 tests ont donc été effectués.

b. ➢ L'étendue E du temps se calcule en faisant la différence entre la plus grande valeur du temps (2 min 38 s) et la plus petite (2 min 22 s) :

E = 2'38'' - 2'22'' = 16 s (valeur inférieure à 20 s).

➢ 40 tests ont été effectués. La médiane M_D du temps correspond donc à la moyenne entre le 20ième et 21ème temps.

Or : 1+1+2+6+3+7 = 20

Le 20ième temps est donc de 2 min 29 s et le 21ième est donc de 2 min 30 s. Leur moyenne fait 2 minutes et 29.5 secondes. Cette valeur est bien comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s.

➢ La moyenne *M* du temps peut se calculer en faisant juste la moyenne des secondes (des temps mesurés) car tous les temps commencent par 2 minutes.

Ainsi, la moyenne des secondes est égale à :

$$M = \frac{1\times 22 + 1\times 24 + 2\times 26 + 6\times 27 + \ldots}{40}$$
$$\frac{\ldots 3\times 28 + 7\times 39 + 6\times 30 + 3\times 31 + \ldots}{40}$$
$$\frac{\ldots 1\times 32 + 2\times 33 + 3\times 34 + 2\times 35 + \ldots}{40}$$
$$\frac{\ldots 3\times 38}{40}$$
$$= \frac{1204}{40} \approx 30 \text{ s}$$

Ainsi la moyenne des temps est de 2 min 30 s. Cette valeur est bien entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.

➢ Conclusion : le sablier testé ne sera pas éliminé.

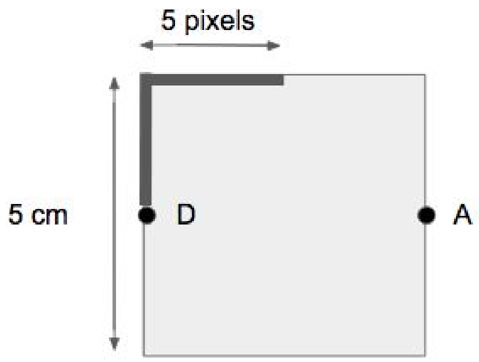
Exercice IV

1

Le script Carré consiste à répéter 4 fois, en tournant de 90° à chaque répétition, le traçage de 2 demi-côtés perpendiculaires l'un à l'autre et mesurant chacun 5 pixels (voir les traits épais sur la figure suivante).

Le carré tracé a donc des côtés de 10 pixels soit 5 cm en tenant compte de l'échelle donnée.

Cela donne la figure suivante :



Avec :

- Point D : Position de départ ;
- Point A : Position d'arrivée.

2

L'exécution du script 1 donnera le traçage de 23 carrés suivi d'un tiret. Il correspond donc au dessin B.

L'exécution du script 2 donnera, de manière aléatoire, le traçage de 46 carrés ou tiret. Il correspond donc au dessin A.

3

a. Il n'y a que 2 nombres aléatoires entre 1 et 2 : le nombre 1 et le nombre 2. Ainsi, dans le script 2, la phrase “si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors Carré sinon Tiret” implique qu'il y a une chance sur 2 (50%) de tracer un carré ou un tiret (½ = 0.5 = 50%).

b. Comme avec le script 2, à chaque nouveau dessin, il y a 50% de chance de tracer un carré ou un trait, les 4 possibilités équiprobables des 2 premiers éléments sont :
- carré + carré;
- carré + tiret;
- tiret + carré;
- tiret + tiret.

Il y a donc une chance sur 4 (25%) que les deux premiers éléments soient des carrés (¼ = 0.25 = 25%).

4

Dans, la question 3.1, il a été démontré que la consigne “si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors” induit une probabilité de 50%.

Ainsi, pour “que la couleur des différents éléments, tirets ou carrés, soit aléatoire, avec à chaque fois 50 % de chance d’avoir un élément noir et 50 % de chance d’avoir un élément rouge”, à la ligne 7 du script, il faut insérer les lignes :

- si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors
- mettre la couleur du stylo à rouge
- sinon
- mettre la couleur du stylo à noir.

Exercice V

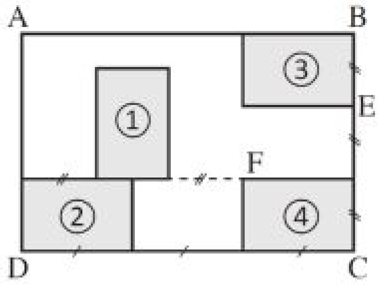
1

a. Le rectangle 3 est l’image du rectangle 4 par la translation qui transforme C en E.

b. Le rectangle 3 est l’image du rectangle 1 par la rotation de centre F et d’angle 90° dans le sens des aiguilles d’une montre.

c. Le rectangle ABCD est l’image du rectangle 2 par l’homothétie de centre D et de rapport 3.

2



La figure de l'énoncé de l'exercice 5 (voir ci-dessus) montre que :

- la longueur d’une petit rectangle est 3 fois plus petite que la longueur du grand rectangle ;
- la largeur d’un petit rectangle est 3 fois plus petite que la largeur du grand rectangle.

Ainsi, les petits rectangle sont une réduction du grand rectangle par un rapport de ⅓.

Or, d'après le cours, si une figure A est une réduction d’une figure B par un rapport k, alors l’aire de A est une réduction de l’aire de B par un rapport k^2.

L’aire du grand rectangle est de 1,215 m^2 (voir énoncé).

L'aire A_{PR} d'un petit rectangle est donc égale à :

$$A_{PR} = 1{,}215 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1{,}215 \times \frac{1}{9} = 0{,}135 \text{ m}^2$$

3

- Soit x la longueur du rectangle *ABCD ;*
- Soit y la largeur du rectangle *ABCD.*

D'après le cours, l'aire A_{ABCD} du rectangle *ABCD* est égale à :

$A_{ABCD} = x \times y$

D'après l'énoncé, “le ratio longueur : largeur est égal à 3 : 2 pour chacun des cinq rectangles” donc :

$y = ⅔\, x$

Donc : $A_{ABCD} = x \times y = x \times (⅔\, x) = ⅔\, x^2$

Or, d'après l'énoncé, $A_{ABCD} = 1.215$ m^2

donc :

$1{,}215 = ⅔\, x^2$

$\Leftrightarrow \quad 1.215 \times \dfrac{3}{2} = x^2$

$\Leftrightarrow 1.8225 = x^2$

$\Leftrightarrow x = 1.35$ m.

$\Leftrightarrow$ y = = ⅔ × 1.35 = 0.9 m.

La longueur du rectangle *ABCD* est donc de 1.35 m ets sa largeur de 0.9 m.

Exercice VI

1

Si 5 est le nombre de départ :

- le programme 1 donne :
5 → 3 × 5 = 15 → 15 + 1 = 16
- le programme 2 donne :
5 → (à gauche) 5 - 1 = 4
→ (à droite) 5 + 2 = 7
→ (au final) 4 × 7 = 28

2

a. Si x est un nombre choisi au départ, le programme 1 donne : $x \rightarrow 3 \times x = 3x \rightarrow 3x + 1$

Donc A(x) = $3x + 1$

b. Pour déterminer le nombre que l'on doit choisir au départ pour obtenir 0 comme résultat du programme 1, il faut résoudre l'équation :
A(x) = 0
$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 3x = -1$
$\Leftrightarrow x = -⅓$

3

Le développement de B(x) donne :

B(x) = $(x - 1)(x + 2)$
B(x) = $x^2 + 2x - x - 2$
B(x) = $x^2 + x - 2$

4

a. Le développement de $(x + 1)(x - 3)$ donne :

$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$

Or :

- $B(x) = x^2 + x - 2$ et
- $A(x) = 3x + 1$

donc

$B(x) - A(x) = (x^2 + x - 2) - (3x + 1)$
$= x^2 + x - 2 - 3x - 1$
$= x^2 - 2x - 3$

Donc $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$

b. Pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat, il faut résoudre l'équation :

$B(x) = A(x)$

$\Leftrightarrow B(x) - A(x) = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$ (voir question précédente)
$\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Ainsi, les nombres -1 et 3 doivent être choisis pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat.