Exercice I

1

La lecture de la carte géographique suggère que Pyeongchang (en Corée du Sud) a approximativement une latitude de 130ºE et une longitude 35ºN.

2

Le figure graphique de l'énoncé montre que le diamètre d de la la boule de cristal est de 23 cm.

Soit R le rayon de la boule de cristal :

$$R = \frac{d}{2} = \frac{23}{2} = 11.5 \text{ cm}$$

Le volume V d'une sphère de rayon R est donné par la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ainsi, le volume V_{boule} de la boule de cristal est :

$$V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 11.5^3 = 6371 \text{ cm}^3$$

3

Pour savoir si Marie a raison, il faut commencer par calculer le volume du socle.

Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est donné par la formule : $V = \pi r^2 h$

De plus, le rayon r du socle est égale :

$$\frac{D}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm (où D est le diamètre du socle)}$$

Ainsi, le volume V_{socle} est :

$V_{socle} = \pi r^2 h \approx 3.14 \times 3^2 \times 23 = 650 \text{ cm}^3$

Le volume total V_{TOT} du trophée est égale à :

$V_{boule} + V_{socle} = 6371 + 650 = 7021 \text{ cm}^3$

La division de V_{boule} par V_{TOT} donne :

$$V_{boule} / V_{TOT} = \frac{6371}{7021}$$

$V_{boule} / V_{TOT} \approx 0{,}907 \approx 0{,}91$ soit environ 91%

Marie avait donc raison.

Exercice II

1

D'après les données statistiques présentées dans l'énoncé, la concentration moyenne de PM10, à Lyon, entre du 16 au 25 janvier, est de 72,5 $\mu g/m^3$.

Afin de calculer la concentration moyenne $m_{Grenonble}$ de PM10 à Grenoble, il faut faire le total des concentrations journalières du 16 au 25 janvier et diviser celui-ci par le nombre de jour.

Ainsi :

$$m_{Grenonble} = \frac{32+39+52+57+78+63+60+82+82+89}{10} = 63{,}4\ \mu g/m^3$$

Ainsi, Lyon a une concentration moyenne en PM10 plus forte que Grenoble (car 72.5 $\mu g/m^3$ > 63,4 $\mu g/m^3$).

2

Pour calculer l'étendue E des séries relevées en PM10 à Lyon et Grenoble, il faut soustraire la plus grande concentration avec la plus petite. Ainsi :

E_{Lyon} = 107 $\mu g/m^3$ - 22 $\mu g/m^3$ = 85 $\mu g/m^3$

$E_{Grenoble}$ = 89 $\mu g/m^3$ - 32 $\mu g/m^3$ = 57 $\mu g/m^3$

L'étendue de la ville de Lyon est donc plus importante. Cela veut dire que les variations du polution d'un jour à l'autre sont plus importantes à Lyon qu'à Grenoble.

3

La période du 16 Janvier au 25 Janvier comprend 10 jours. La médiane étant de 83.5 $\mu g/m^3$, cela signifie qu'entre le 16 et 25 janvier, 5 jours ont connus des relevés des concentrations en PM10 supérieurs à 83.5 $\mu g/m^3$ et 5 jours inférieurs à 83.5 $\mu g/m^3$.

83,5 $\mu g/m^3$ etant superieur a 80 $\mu g/m^3$, il est juste d'affirmer que "le seuil d'alerte de 80 µg/m3 par jour a été dépassé au moins 5 fois à Lyon".

Exercice III

1

Théo a téléchargé 375 morceaux de musiques dont 125 morceaux de rap. Il décide d'écouter les morceaux de manières aléatoirement.

La probabilité que Théo écoute du rap se calcule en divisant le nombre de morceaux de rap sur le nombre total de morceaux téléchargés. Soit :

$$P = \frac{125}{375} = \frac{5\times5\times5\times1}{5\times5\times5\times3} = \frac{1}{3}$$

La probabilité que Théo écoute du rock est de : $\frac{7}{15}$

C'est-à-dire sept quinzième.

2

Comme vu dans la question précédente, cette probabilité est égale au nombre de morceaux de rock M sur le nombre total total de morceaux téléchargés (qui est de 375).

Ainsi $\frac{7}{15} = \frac{M}{375}$

Donc :

$$M = \frac{7}{15} \times 375 = 175$$

Théo possède donc 175 musiques de Rock.

3

Alice possède 40% de morceaux rock dans son lecteur audio.

$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

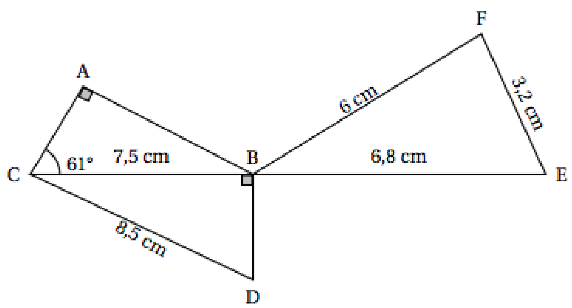
Dans la question précédente, Théo avait une probabilité de sept quinzième d'écouter un morceaux de rock.

$$\frac{7}{15} > \frac{6}{15}$$

Donc, Théo a plus de chances d'écouter de la musique rock qu'Alice.

Exercice IV

D'après le schéma ci dessous :



Les points C, B, E sont alignés.

Le triangle ABC est rectangle en A.

Le triangle BDC est rectangle en B.

1

Le triangle ABC est rectangle en B et CD est son hypoténuse. Le théorème de pythagore s'écrit de la manière suivante :

$CB^2 + DB^2 = CD^2$
$\Leftrightarrow BD^2 = CD^2 - CB^2$
$\Leftrightarrow DB^2 = 8.5^2 - 7.5^2$
$\Leftrightarrow DB^2 = 72.25 - 52.25$
$\Leftrightarrow DB^2 = 16$
$\Leftrightarrow DB = \sqrt{16}$
$\Leftrightarrow DB = 4$ cm

Ainsi, la longueur DB est égale à 4 cm.

2

D'après le cours, deux triangles sont semblables, si leurs côtés sont proportionnels.

Ainsi, si les deux triangles CBD et BFE sont semblables, alors :

$$\frac{BF}{BC} = \frac{FE}{DB} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{3.2}{4} = 0.8$$

$$\frac{FE}{DB} = \frac{6}{7.5} = 0.8$$

$$\frac{BE}{CD} = \frac{6.5}{8.5} = 0.8$$

Par conséquents les triangles CBD et BFE sont semblables.

3

Pour prouver que Sophie a raison, il faut démontrer que le triangle BFE est rectangle.

$BE^2 = 6.8^2 = 46.24$

De plus :

$BF^2 + FE^2 = 6^2 + 3.2^2 = 36 + 10.24 = 46.24$

Donc $BE^2 = BF^2 + FE^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BFE est donc rectangle en F. Sophie a donc raison.

4

La figure montre que :

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$$

BCD étant un triangle rectangle, d'après les formules trigonométriques :

$$\cos(\widehat{BCD}) = \frac{côté\ adjacent}{hypothénuse}$$

$$\cos(\widehat{BCD}) = \frac{CB}{CD} = \frac{7.5}{8.5} = 0.88$$

$$\widehat{BCD} = \cos^{-1}(0.88) = 28°$$

$$\widehat{ACB} = 61°$$

La figure montre aussi que :

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$$

Donc :

$$\Leftrightarrow \widehat{ACD} = 61° + 28° = 89°$$

89° ≠ 90°

Ainsi, l'affirmation de Max n'est pas correcte car l'angle ne fait pas 90º.

Exercice V

1

Le programme est le suivant :
- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 4
- Ajouter 6
- Multiplier le résultat par 2

Soit n le nombre choisi et R le résultat Le programme peut s'écrire :

$R = 2 \times (4n + 8)$

Donc si n = -1 :

$R = 2 \times (4 \times (-1) + 8) = 2 \times (-4 + 8) = 2 \times 4 = 8$

En conclusión, si le nombre de départ est -1, le résultat R será bien 8.

2

Afin de trouver le nombre de départ n, il faut résoudre l'équation suivante :

$R = 30$
$\iff 2 \times (4n + 8) = 30$
$\iff 8n + 16 = 30$
$\iff 8n = 14$
$\iff n = 14/8 = 1.75$

3

L'énoncé donne deux expressions :

$A = 2 \times (4x + 8)$
$B = (4 + 2)^2 - x^2$

Le développement de A donne :

$A = 2 \times (4x + 8) = 8x + 16$ ou $16 + 8x$

Le développement de B à l'aide de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donne :

$B = (4 + x)^2 - x^2$
$\iff B = (4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + x^2) - x^2$
$\iff B = (16 + 8x + x^2) - x^2$
$\iff B = 16 + 8x + x^2 - x^2$
$\iff B = 16 + 8x$

Ainsi, les expressions A et B sont égales.

4

Affirmation 1

Afin de prouver que les résultats sont positives pour tout nombre x, il faut résoudre l'inéquation :

$A > 0$
$\iff 16 + 8x > 0$
$\iff 8x > -16$
$\iff x > -2$

Donc le résultat A est positif si et seulement si le nombre choisi x est supérieur à -2. L'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2

$A = 16 + 8x = 8(2 + 8x)$

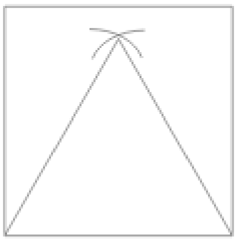
L'expression $A = 16 + 8x$ étant factorisable par 8, l'affirmation 2 est bien correcte.

Exercice VI

D'après l'énoncé, les longueurs sont en pixels et l'expression "s'orienter à 90" signifie s'orienter vers la droite.

1

a. Si le programme est exécuté jusqu'à la ligne 7, la figure dessinée sera comme ci-dessous :



b. Les coordonnées du stylo après l'exécution de la ligne 8 seront :

x = 50 et y = 0

2

La ligne 9 s'écrit : mettre Longueur à 200

En effet, par symétrie, le traçage de la figure intérieure implique que 50 pixels soient enlevés à droite et à gauche des 300 pixels de départ, ainsi :

300 - (2 × 50) = 200

3

a. La transformation qui permet d'avoir le petit carré à partir du grand carré est une homothétie. En effet, il s'agit d'une réduction.

La rapport se calcule de la manière suivante :

$$\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

b. Le premier carré a une aire de 200 × 200 = 40000 pixels carré. Le second carré a une aire de 300 × 300 = 90000 pixels carré. Le rapport des airs est donc :

$$Rapport\ des\ aires\ = \frac{40\,000}{90\,000} = \frac{4}{9}$$

Exercice VII

1

La représentation graphique montre une droite. Mais, celle-ci ne passe pas par l'origine. Donc, le temps et la vitesse de rotation ne sont pas proportionnels.

2

a. Une lecture graphique montre que la vitesse de rotation initiale est de 20 tours par seconde.

b. 1 minute et 20 secondes correspondent a 60 + 20 = 80 secondes.

Une lecture graphique montre que la vitesse de rotation au bout de 80 secondes est de 3 tours par secondes.

c. Le graphique montre que le hand spinner s'arrêtera au bout de 93 secondes

3

a. La vitesse V(t) du hand spinner se calcule avec la formule suivante :

$V(t) = -0.214 \times t + V_{initiale}$

où t est le temps en secondes.

Ici $V_{initiale}$ = 20 tours par seconde, donc la formule pour calculer la vitesse est :

$V(t) = -0.214 \times t + 20$

Pour t = 30 secondes,

$V(30) = -0.214 \times 30 + 20 = 13.58$ tours/s

b. Si le hand spinner s'arrête, sa vitesse est égale à 0 m/s. Ainsi, il faut résoudre l'équation suivante :

$0 = -0.214 \times t + 20$

$$t = \frac{-20}{-0.214} = \frac{20}{0.214} = 93.36 \text{ s}$$

Le hand spinner s'arrêtera donc au bout de 93,36 s.

c. Si le hand spinner tourne deux fois plus vite qu'au départ, sa vitesse initiale est donc de 40 tours par secondes. Il s'arrêtera quand sa vitesse sera égale à zéro. Ainsi, il faut résoudre l'équation :

$0 = -0.214 \times t + 40$

$$\iff t = \frac{-40}{-0.214} = \frac{40}{0.214} = 186.92 \text{ s}$$

Or comme $2 \times 93.46 = 186.92$ s : l'affirmation est vraie !