Corrigé du sujet de Mathématiques - Métropole - 2017

Exercice 1

1. L'urne étudiée ne contient que des boules vertes ou bleues. Le joueur ne peut donc tirer qu'une boule de couleur bleue ou de couleur verte. Cela signifie que l'événement *B* 'Tirer une boule de couleur bleue' exclue toute possibilité de 'Tirer une boule de couleur verte' (événement *V*). Les événements *B* et *V* sont dit contraires et, d'après le cours, ils sont liés par la relation :

$$p(V) + p(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow\ p(B) = 1 - p(V) = 1 - \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow\ p(B) = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

2. Oui, Paul aura plus de chance de tirer une boule bleue au septième tirage. En effet, les tirages sont indépendants : c'est a dire que le premier tirage n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième tirage qui n'a pas d'influence sur le résultat du troisième tirage … (et ainsi de suite ...). Les probabilités de tirer des boules vertes ou bleues au septième tirage sont donc les mêmes qu'au premier tirage. C'est à dire que la probabilité de tirer une boule bleue $p(B)$ sera toujours plus grande que celle de tirer une boule verte $p(V)$ car : $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$

3. La probabilité $p(B)$ de tirer une boule bleue se calcule grâce à la relation :

$$p(B) = \frac{\textit{nombre de boules bleues}}{\textit{nombre de boules total}}$$

Soit *x* le nombre de boules bleues. Comme le nombre de boules vertes est égale à 8, le nombre de boules total est égale à : $x + 8$.

De plus, d'après la question 1 : $p(B) = \frac{3}{5}$

Ainsi :

$$p(B) = \frac{\textit{nombre de boules bleues}}{\textit{nombre de boules total}}$$

et

$$p(B) = \frac{3}{5} = \frac{x}{x+8} \text{ soit :}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{x+8} = \Leftrightarrow 3\ \frac{5x}{x+8} =$$

$$\Leftrightarrow\ 3(x + 8) = 5x$$

$$\Leftrightarrow\ 3x + 24 = 5x$$

$$\Leftrightarrow\ 3x - 5x = -24$$

$$\Leftrightarrow\ -2x = -24$$

$$\Leftrightarrow\ 2x = 24$$

$$\Leftrightarrow\ x = 12$$

Il y a donc 12 boules bleues au sein de cette urne.

Exercice 2

1. La ligne 3 du script indique que les coordonnées du point de départ sont : (-200;-100)

2. La ligne 6 du script indique que ce programme dessine 5 triangles.

3.a. D'après la ligne 5 du script, le premier côté mesure 100 pixels. D'après la ligne 9 du script, l'ordinateur enlève 20 pixels à chaque fois qu'il trace un nouveau triangle.

La longueur L du côté du deuxième triangle est donc égale à 100 – 20 = 80 pixels.

3.a. Les triangles obtenus à l'aide de ce script sont ordonnés les uns à côté des autres dans l'ordre croissant de leurs dimensions. C'est à dire du plus petit au plus grand.

4. Pour obtenir cette figure, il faut placer l'instruction à la place de la commande numéro 8.

Exercice 3

1. Le graphique montre que la représentation graphique de la tension en fonction du temps correspond à une courbe et non une droite passant par l'origine. La situation n'est donc pas proportionnelle.

2 . Une lecture graphique montre que pour un temps de 0,2 s, la tension mesurée est de 4,4 Volts.

3. 60% de la tension maximale est égale à 60% de 5 Volts c'est à dire :

$$0{,}6 \times 5 = 3 \text{ Volts}$$

Une lecture graphique montre que une tension de 3 Volts correspond à un temps d'environ 0.09 s.

Exercice 4

1. La centrale est de type B et sa puissance est de 28 kW (soit entre 0 et 36 kW). Pour connaître ses caractéristiques, il faut donc regarder la deuxième ligne du tableau. De plus, la centrale a été achetée en Mai 2015 (soit entre le 01/04/15 et le 30/06/15), il faut donc regarder la quatrième colonne du tableau pour savoir son tarif au kWh.

Attention les prix indiqués dans le tableau sont en centimes. Il faut donc les diviser par 100 pour les avoir en euros.

Une centrale de type B achetée en Mai 2015 a un prix au kWh de 13,95 centimes soit 0,1395 euros.

Son prix p pour 31 420 kWh est donc :

$$p = 0{,}1395 \times 31\,420 = 4\,383 \text{ en euros}$$

Le prix demandé est donc bien d'environ 4 383 euros.

2. Le triangle *ABC* est rectangle en C. D'après les formules trigonométriques :

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{Longueur du côté opposé de l'angle}}{\text{Longueur du côté adjacent à l'angle}} = \frac{AC}{BC} \approx 0{,}49$$

Donc

$$\arctan\left(\frac{AC}{BC}\right) = \arctan(0{,}49) = 26$$

Donc l'angle $\widehat{ABC}$ mesure environ 26 degrés.

3. a. Le triangle *ABC* est rectangle en *C*. D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$\Leftrightarrow AB^2 = 2{,}2^2 + 4{,}5^2$$
$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{25{,}09} \approx 5$$

La longueur *AB* est environ égale à 5 mètres.

3. b. Le pan sud du toit est un rectangle de longueur 7,5 m et de largeur 5 m. L'aire de ce pan sud est donc égale à sa largeur multipliée par sa longueur, soit :

$$7{,}5 \times 5 = 37{,}5 \text{ m}^2$$

L'aire d'un panneau photovoltaïque est de 1 m² (car les panneaux photovoltaïques sont des carrés d'un mètre de côté). 20 panneaux photovoltaïques couvrent donc une surface de 20 m².

Le pourcentage de surface couverte est donnée par la relation :

$$\frac{Surface\,couverte\,par\,les\,20\,panneaux}{L'\,aire\,du\,pan\,sud}$$

$$= \frac{20}{37,5} \approx 0,53 \approx 53\%$$

3.c. Les panneaux doivent être accolés les uns aux autres et forment ainsi un ensemble rectangulaire.

Une bordure de 30 cm de large (0,3 m) doit être laissée libre tout autour de l'ensemble des panneaux. Horizontalement, il faut donc prévoir 0,6 mètres de bordure (0,3 mètres à gauche de l'ensemble des panneaux et 0,3 mètres à droite). De même, verticalement, il faut aussi prévoir 0,6 mètres de bordure (0,3 mètres en haut de l'ensemble des panneaux et 0,3 mètres en bas)

Un panneau a la forme d'un carré de 1 m de côté.

La longueur du toit est de 7,5 m, 6 panneaux avec 0,6 m de bordure peuvent donc y être placés car :

$$(6 \times 1) + 0.6 = 6.6 \text{ m}$$

7 panneaux ne peuvent pas être placés en longueur car, avec la bordure de 0,6 m, ils occuperaient :

$$(7 \times 1) + 0.6 = 7.6 \text{ m}$$

La largeur du toit est de 5 m, 4 panneaux avec 0,6 m de bordure peuvent donc y être placés car :

$$(4 \times 1) + 0.6 = 4.6 \text{ m}$$

Le propriétaire peut donc installer jusqu'à 6 panneaux sur la longueur et 4 sur la hauteur. Soit :

$$6 \times 4 = 24 \text{ panneaux maximum.}$$

Il peut ainsi installer ses 20 panneaux comme prévu.

Exercice 5

1. Soit :

- v la vitesse (exprimée en m/s),
- d la distance (exprimée en mètres)
- t la durée (exprimée en secondes)

Par définition :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{50}{24,07} = 2,08 \text{ m/s}$$

De plus :

$$\begin{aligned} & 6 \text{ km/h} \\ &= 6000 \text{ m} / 3600 \text{ s} \\ &= 6 \text{ m} / 3,6 \text{ m} \\ &= 1,67 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Comme 2, 08 m/s > 1, 67 m/s, la nageuse danoise a nagé plus rapidement qu'une personne qui se déplace en marchant vite (c'est-à-dire à 6 km/h ou 1,67 m/s).

2. a. Le développement de E donne :

$$E = (3x + 8)^2 - 64$$
$$\square\ E = (3x)^2 + 48x + 8^2 - 64$$
$$\square\ E = 9x^2 + 48x + 64 - 64$$
$$\square\ E = 9x^2 + 48x$$

2. b. D'après la question 2.a, le développement de E donne :

$$E = 9x^2 + 48x$$
$$\square\ E = (3x \times 3x) + (3x \times 16)$$
$$\square\ E = 3x(3x + 16)$$

2. c. L'équation $E = 0$ peut se réécrire :

$$(3x + 8)^2 - 64 = 0$$

D'après la question 2.b, elle peut aussi se réécrire :

$$3x(3x + 16) = 0$$

C'est à dire une équation produit nul. Ainsi :

$$3x(3x + 16) = 0$$

équivaut à dire que soit 3x = 0 ou que 3x + 16 = 0

$$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

De plus :

$$3x + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x = -16$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-16}{3}$$

Les solutions de l'équation proposées sont donc :

$$0 \text{ et } \frac{-16}{3}$$

3. L'énoncé pose l'égalité **:**

$$d = k \times V^2$$
$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{d}{k}$$

Comme V est un nombre positif :

$$V = \sqrt{\frac{d}{k}} = \sqrt{\frac{15}{0,14}} = 10,35 \text{ m /s.}$$

La vitesse recherchée est égale à 10,35 m/s.

Exercice 6

1.a. Une lecture du tableau permet de dire que trois employés (A, B et F) ont un indice de masse corporelle supérieure a 25. Ils sont donc en situation de surpoids ou obésité dans cette entreprise.

1. b. La formule correcte est : B2 / (B1 * B1)

2. a. Soit ***I*** l' indice de Masse Corporel IMC moyen des employés de cette entreprise :

$$I = \frac{20\times9+22\times12+23\times6+24\times8+25\times2+29+30\times2}{41}$$

$$I = 23$$

2. b. Soit M l'IMC médian des 41 personnes. Il faut donc séparer l'effectif en en deux groupes de 20 personnes (avec toutes les valeurs d'IMC rangées de façon croissante ou décroissante). L'IMC médian M est alors l'IMC de la 21ème personne. Soit :

$$M = 22$$

2. c. D'après le tableau de la question 2, 6 personnes sur 41 sont en surpoids dans cette entreprise (elles ont un IMC supérieur a 25).

Le taux d'obésité dans cette compagnie est donc de :

$$\frac{6}{41} \text{ x } 100 = 14,6 \text{ \%}$$

14,6 % > 5%, les salariés de cette entreprise respectent donc l'estimation posée par les magazines.

Exercice 7

1 . La proportion classique entre les masses de fraises et de sucre dans la confiture est de 1kg de fraises pour 0,7 kg (700g) de sucre.

Soit x le nombre de grammes de sucre dont Léo a besoin. Comme il dispose de 1,8 kg de fraises, d'après la règle du produit en croix :

$$x = \frac{1,8\,kg\ de\ fraises \times 0,7\ kg\ de\ sucre}{1\ kg\ de\ fraises}$$

$$\Leftrightarrow x = 1,26 \text{ kg}$$

Léo aura donc besoin de 1,26 kg de sucre pour cuisiner 1,8 kg de fraises selon la recette de sa grand-mère.

2. D'après le cours :

- 1 L correspond à 1000 dm².
- 1 dm² = 1000 cm²

Ainsi :

$$2{,}7 \text{ L} = 2{,}7 \text{ dm}^2 = 2700 \text{ cm}^2$$

De plus :

- Le rayon du cylindre formé par la confiture est égale a 3 cm (la moitie du diamètre d'un pot) ;
- La hauteur du cylindre formé par la confiture est de 11 cm (c'est à dire les 12 cm de hauteur d'un pot moins les 1 cm laissés libre jusqu'au bord).
- Le volume d'un cylindre est donné par la formule : π × rayon² × hauteur

Le volume V formé par la confiture dans un pot est donc de :

$$V = \pi \times 3^2 \times 11 \approx 311 \text{cm}^2$$

Soit n le nombre de pots à remplir pour un volume de 2700 cm^3 confiture.

$$n = \frac{2700}{V} = \frac{2700}{311} \approx 8{,}68$$

n doit être entier et positif. 8 pots est donc le nombre de pot qui peuvent être remplis entièrement.

3.a. Soit L la longueur d'une étiquette. Si celle-ci fait le tour du pot, elle est égale au périmètre du cylindre de rayon R. Ainsi :

$$L = Périmètre = 2 \times \pi \times R$$

$$L = \pi \times d$$

avec d le diamètre du pot cylindrique

$$L = 6 \times d \approx 18{,}8 \text{ cm}$$

3.b. Une étiquette a une largeur l de 12 cm donc, si l'échelle est de 1/3, alors cette largeur est de :

$$12 /3 = 4 \text{ cm}$$

La longueur de cette étiquette étant de 18,8 cm, elle mesurera 6,3 cm pour la même échelle de 1/3.

Ainsi, il suffit de tracer un rectangle de longueur 6,3 cm et de largeur 4 cm pour représenter l 'étiquette à l'échelle 1/3.