

Corrigé du sujet de Mathématiques - Métropole - 2016

Exercice 1

1. Il y a $473 + 27$ composants dans l'usine A. Sur ces 500 composants, 27 sont défectueux. La probabilité d'avoir un composant défectueux dans l'usine A est donc égale à :

$$\frac{27}{500} = \frac{54}{1000} = 0,054 = \frac{5,4}{100} = 5,4 \%$$

2. Il y a $27 + 38 = 65$ composants défectueux. Sur ces 65 composants, 27 proviennent de l'usine A. La probabilité qu'un composant provienne de l'usine A est donc égale à :

$$\frac{27}{65} \approx 0,415 \text{ ou } 41,5 \%$$

3. Il y a $462 + 38$ composants dans l'usine B. Sur ces 500 composants, 38 sont défectueux. La probabilité d'avoir un composant défectueux dans l'usine B est donc égale à :

$$\frac{38}{500} = \frac{76}{1000} = \frac{7,6}{100} = 7,6 \%$$

Cela est supérieur à 7 %. Donc, même si la probabilité d'avoir un composant défectueux dans l'usine A est inférieure à 7% (voir la réponse à la question 1.), le contrôle n'est pas satisfaisant.

Exercice 2

1. Si on applique le programme A avec le nombre 2, on obtient :

$$2 \rightarrow 2 \times (-2) = -4 \rightarrow -4 + 13 = 9$$

2. Soit x un nombre quelconque. Si on applique le programme B avec le nombre x , on obtient :

$$x \rightarrow x - 7 \rightarrow (x - 7) \times 3$$

Ainsi, pour trouver le nombre x pour lequel le programme B donne 9, il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 3(x - 7) &= 9 \\ \Leftrightarrow 3x - 9 &= 21 \\ \Leftrightarrow x - 3 &= 7 \\ \Leftrightarrow x &= 10 \end{aligned}$$

3. Soit y un nombre quelconque. Si on applique le programme A à y , on obtient :

$$y \rightarrow y \times (-2) = -2y \rightarrow -2y + 13 = 13 - 2y$$

Si on applique le programme B à y , on obtient :

$$y \rightarrow y - 7 \rightarrow 3(y - 7)$$

Ainsi, pour trouver un nombre y donnant le même résultat avec les deux programmes, il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 13 - 2y &= 3(y - 7) \\ \Leftrightarrow 13 - 2y &= 3y - 21 \\ \Leftrightarrow 13 + 21 &= 3y + 2y \\ \Leftrightarrow 34 &= 5y \\ \Leftrightarrow \frac{34}{5} &= y = 6,8 \end{aligned}$$

Le nombre 6,8 donne donc le même résultat (-0.6) avec les programmes A et B.

Exercice 3

Figure 1

Comme $BC = CJ = JA = 6$ cm, on déduit que $CA = 12$ cm.

De plus, le triangle ABC est rectangle en B. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore et écrire :

$$\begin{aligned} AC^2 &= CB^2 + AB^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 &= AC^2 - CB^2 = 12^2 - 6^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 &= 144 - 36 = 108 \end{aligned}$$

Donc $AB = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6 \times \sqrt{3} \approx 10,39$

AB est donc égale à environ 10,4 cm.

Figure 2

D'après le cours, on sait que :

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin 53 = \frac{AB}{36}$$

$$\Leftrightarrow AB = 36 \sin 53 \approx 28,750 \approx 28,8$$

AB est donc égale à environ 28,8 cm.

Figure 3

D'après le cours, on sait que la le périmètre d'un cercle est égale à son rayon multiplié par π . On a donc :

$$\begin{aligned} & AB \times \pi \\ \Leftrightarrow AB \times \pi &= 154 \\ \Leftrightarrow AB &= \frac{154}{\pi} \approx 49,02 \approx 49 \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Pour soustraire 30% du prix d'un article, il faut multiplier le prix initiale par :

$$1 - \frac{30}{100} = \frac{100 - 30}{100} = \frac{70}{100} = 0,70$$

Ainsi, comme l'article coûte au départ 54 €, après une réduction de 30%, il coûte :

$$54 \times 0,7 = 37,80 \text{ (€)}$$

2. a. Le commerçant a saisi, dans la cellule B2, la formule :

$$B2 = B1 * 0,30$$

2. b. Le commerçant peut saisir, dans la cellule B3, la formule :

$$B3 := B1 - B2$$

3. Soit P le prix initial. On a :

$$P \times 0,7 = 42 \text{ ou } 7P = 420 \text{ soit } P = 60 \text{ (€)}$$

Exercice 5

1. L'aire d'un triangle est égale à :

$$(Base \times Hauteur) / 2$$

Le triangle PAS est rectangle en A. son aire est donc égale à :

$$\frac{PA \times AC}{2}, \text{ soit } \frac{30 \times 18}{2} = 270 \text{ (m}^2\text{)}$$

Un sac de gazon couvre 140 mètres carrés. Il faut donc au moins deux sacs de gazon ($2 \times 140 = 280 > 270$) pour couvrir la zone de jeux pour enfants (surface du triangle PAS).

Comme un sac de gazon coûte 13,90€, le budget de la commune doit être de :

$$2 \times 13,90 = 27,80 \text{ (€)}$$

2. D'après le cours, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Ainsi, comme les droites (AS) et (RC) sont perpendiculaires à (PA), on peut en déduire qu'elles sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès et écrire :

$$\begin{aligned} \frac{PA}{PR} &= \frac{AS}{RC} \\ \Leftrightarrow \frac{30}{(30+10)} &= \frac{18}{RC} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} &= \frac{18}{RC} \\ \Leftrightarrow 3RC &= 4 \times 18 \\ \Leftrightarrow RC &= 4 \times 6 = 24 \text{ (m)} \end{aligned}$$

L'aire du triangle PRC est donc égale à :

$$\frac{PR \times RC}{2} = \frac{40 \times 24}{2} = 40 \times 12 = 480 \text{ (m)}$$

L'aire du «skatepark» est donc égale à :

$$480 - 270 = 210 \text{ (m}^2\text{)}$$

Exercice 6

Partie 1 :

1. Comme le morceau numéro 1 mesure 8 cm, on sait que le périmètre du carré est égale à 8 cm. Soit c le côté du carré à construire. On a :

$$8 = 4c \Leftrightarrow c = 2 \text{ (cm)}$$

On dessine donc un carré de 2 cm de côté.

La ficelle mesure 20 cm. Comme le morceau numéro 1 mesure 8 cm, le morceau numéro 2 mesure de $20 - 8 = 12$ cm. On sait donc que le périmètre du triangle équilatéral est égale à 12 cm. Soit b le côté du triangle équilatéral.

On a :

$$3b = 12 \Leftrightarrow b = 4 \text{ (cm)}$$

On dessine donc un triangle équilatéral de 12 cm de côté.

2. L'aire du carré est égale à :

$$c^2 = 2^2 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

3. On voit graphiquement que la hauteur du triangle équilatéral mesure environ 3,4 cm. L'aire de ce triangle est donc égale à :

$$\frac{4 \times 3,4}{24} \times 1,7 = 6,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Partie 2 :

1. Soit x est la longueur «morceau no 1». Le côté du carré a pour longueur $\frac{x}{4}$ et donc l'aire du carré est égale à :

$$(A) \text{ carré} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{16}\right); \text{ (côté} \times \text{côté)}$$

2.a On s'intéresse à l'aire du morceau numéro 2. Il faut donc étudier la courbe B. Sur le graphique, on voit que le point de la courbe B qui a une ordonnée de 14 cm^2 a une abscisse de 2,95 cm. Ainsi, si le morceau 1 mesure 2.95 cm, le triangle équilatéral aura une aire de 14 cm^2 .

2.b. Sur le graphique, on voit que le point commun aux deux courbes (représentant les aires des deux polynômes) a pour coordonnées (9,4;5,5). Ainsi, si le morceau 1 mesure 9.4 cm, les deux polynômes auront tous les deux une aire égale à $5,5 \text{ cm}^2$.

Exercice 7

D'après le cour, le volume d'un parallélépipède rectangulaire est égale à :

$$\text{largeur} \times \text{longueur} \times \text{hauteur}$$

En s'appuyant sur la figure donnant les caractéristiques du vase, on voit que la longueur de sa base est égale à :

$$9 - 2 \times 0,2 = 8,6 \text{ cm}$$

La base du vase est un carré, sa largeur est donc aussi égale a 8,6 cm.

La hauteur du vase est égale à :

$$21,7 - 1,7 = 20 \text{ cm}$$

Le volume du vase est donc égal à :

$$8,6 \times 8,6 \times 20 = 1479,2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Le volume d'une boule est donné par la formule :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$$

Le volume d'une bille est donc égale à :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 0,9^3 = 0,972 \pi$$

150 billes occuperont donc un volume de :

$$150 \times 0,972 \pi = 145,8 \pi$$

Ainsi, après avoir placé 150 billes dans le vase, il restera $1479,2 - 145,8 \pi \approx 1021,16$ (cm³) de libre. Cela est supérieur à 1dm³. Antoine peut donc ajouter un litre d'eau colorée.